

SERII ȘI ȘIRURI

Limitele infinitului

ÁNGEL M. NÚÑEZ

Traducere de Ionela Polixenia Matei

LITERA

București

CUPRINS

Capitolul 0. Nicolas din Oresme	7
Capitolul 1. În câte moduri se poate obține șase ca rezultat al unei adunări	11
Îți propun o afacere	16
<i>Dobânda simplă și dobânda compusă</i>	18
Cum vrei să ți-i restitui?	18
Nicolas și infinitul	21
Capitolul 2. Infinitul poate avea limite	35
Unite de o limită	35
<i>Șiruri de sume parțiale</i>	36
<i>Definiția limitei</i>	38
Serii cu caracter: seriile geometrice	41
<i>Proprietățile seriilor geometrice</i>	43
<i>Serii geometrice cu rația negativă</i>	44
<i>Seria geometrică a timpurilor care îl separă pe Ahile de broasca țestoasă</i>	51
<i>Seria geometrică a muștei și a bicicliștilor</i>	55
Capitolul 3. Dincolo de geometrii	63
Primele dintre ultimele sau ultimele dintre primele	63

<i>Proprietățile funcțiilor trigonometrice</i>	70
Nu confundați/Nu stricați totul	76
Strângerea telescopului	81
<i>Numărul de aur</i>	82
<i>Descompunere în diferență de fracții</i>	86
Capitolul 4. Epilog	89
Anexe	91
1. Problema de la Basel	93
<i>Câmp generat de o distribuție</i>	97
2. Cum se obține misterioasa lege a recurenței?	105
3. Seria telescopică alternantă a paragrafului „Să strângem telescopul”	107
4. Seria armonică alternantă	111
5. O integrală nu este altceva decât o sumă infinită	119
<i>Care este suma primelor n numere naturale?</i>	131
<i>Care este suma pătratelor primelor n numere naturale?</i>	132
Lecturi recomandate	135
Cărți	137
Resurse on-line	138

Capitolul 0

Nicolas din Oresme

Această poveste începe în mănăstirea unei abații benedictine din Normandia medievală. Știu, poate părea arbitrar și fără legătură cu titlul cărții și cu ce s-ar putea aștepta de la conținutul ei. De fapt, am fi putut proceda într-un mod mai ordonat (cel puțin cronologic) și să o facem să înceapă printre coloanele dorice care flanchează o galerie în Anatolia secolului al V-lea î.Hr. (vom vedea de ce mai târziu). Adevărul este că, dacă vrem să fim riguroși, începe exact aici, pe biroul fiicei mele presărat cu creioane colorate, pe care scriu aceste rânduri în timp ce ea își face primele calcule.

Ca atâtea alte povești, și a noastră are mai mulți protagoniști care se succed în timp, adăugând contribuții modeste sau titanice la seria de idei pe care le vom examina pe măsură ce povestea se dezvoltă. Totuși, la fel ca multe altele, și această poveste are un actor proeminent, un geniu intelectual multilateral francez aparținând școlii târzii, unul dintre cele mai importante curente filosofice ale Evului Mediu și considerat de mulți cel mai original gânditor al timpului său.

Nicolas din Oresme s-a născut în jurul anului 1323 într-un sat numit Fleury-sur-Orne, lângă Caen, cel mai probabil într-o familie nu deosebit de înstărită deoarece primește o bursă de studiu de la Colegiul din Navarra, care primește studenți ce nu își pot permite să plătească

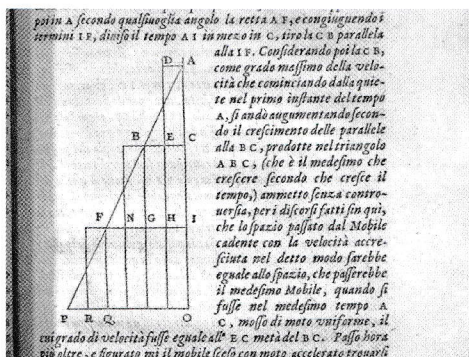


Figura 1. Nicolas din Oresme. La dreapta, schema pentru calculul distanței parcurse într-o mișcare în linie dreaptă uniform accelerată.

cheltuielile Universității din Paris. A studiat teologia și a absolvit la treizeci și trei de ani, vârsta la care a fost numit Mare Maestru al Colegiului din Navarra. Opt ani mai târziu era deja decan al Catedralei din Rouen, completând ceea ce astăzi am numi „o carieră fulgărătoare”.

Nicolas este activ în discipline atât de diverse precum fizica, economia, matematica, psihologia și muzica. Printre numeroasele sale contribuții, merită menționată utilizarea reprezentărilor grafice pe două axe pe care le folosește pentru a demonstra o teoremă cinematică a vremii cunoscută sub numele de *teorema vitezei medii* sau *Teorema lui Merton*, numită după propoziții intuite de matematicienii Colegiului Merton din Oxford cu câțiva ani înainte. Teorema afirmă că distanța parcursă de un obiect a cărui viteză variază liniar (adică se deplasează cu o mișcare uniform accelerată) este aceeași pe care ar fi parcurs-o deplasându-se cu o viteză constantă egală cu media dintre viteza sa inițială și cea finală. O reprezentare grafică schematică a acestei demonstrații este prezentată în figura 1, lângă un portret al lui Nicolas din Oresme însuși.

Profit de oportunitatea oferită de Teorema lui Merton pentru a anticipa că mișcarea și viteza sunt concepte de care ne vom ocupa pe parcursul acestei povești.

Se poate spune despre protagonistul nostru că este în multe privințe înaintea vremurilor sale: de fapt, în *Livre du ciel et du monde*, cu două secole înainte de Copernic, el oferă argumente mai explicite și mai clare în sprijinul tezei că Pământul se mișcă în raport cu alte corpuri cerești. Pentru a face acest lucru se bazează pe observații astronomice, considerații geometrice și principii împrumutate de la alți gânditori contemporani precum Giovanni Buridano sau Guglielmo din Ockham. În cartea sa *Livre de divinations*, luptă puternic cu astrologia și emite ipoteza existenței unor „alte lumi locuite în spațiu”. De parcă nu ar fi de ajuns, Nicolas din Oresme (și nu Robert Hooke, căruia i se atribuie de obicei descoperirea) a fost cel care a descoperit curbura luminii ca urmare a refracției atmosferice.

Oresme aduce și ele contribuții originale gândirii economice: susține că banii sunt un produs al pieței și nu al Statului, îi consideră o marfă și nu doar un mijloc de schimb. Studiază inflația și rolul pe care îl joacă Statul în ea atunci când naționalizează banii. Cu șapte secole înainte de teoria ciclului economic a școlii austriece contemporane, Oresme dezvoltă o teorie economică care anticipează deja unele dintre punctele sale.

Și banii sunt ceva despre care am putea vorbi în carte... Vom vedea cum.

Dar mai există o contribuție a lui Nicolas din Oresme în domeniul științelor formale care este mai direct legată de cei care, împreună cu el și alți gânditori, vor fi adevărații protagoniști ai acestei povești... Cu siguranță ați intuit-o deja. De fapt, Nicolas din Oresme ocupă un loc proeminent în istoria matematicii pentru lucrările sale asupra sumelor infinite (obiecte cunoscute în mod obișnuit în matematică drept *serii*) și asupra secvențelor infinite (denumite în general *șiruri*), două aspecte ale calculului matematic care va trebui să aștepte trei,

respectiv cinci secole pentru ca următoarele progrese semnificative să apară: ceea ce de obicei este numită „minte modestă”...

Prin urmare, ne vom dedica mai întâi să oferim o idee intuitivă despre ceea ce sunt obiectele matematice care, împreună cu Oresme și alți colegi de-ai săi, vor fi în centrul poveștii noastre, pentru a le aprofunda apoi structura și proprietățile.

Capitolul 1

În câte moduri se poate obține șase ca rezultat al unei adunări?

Fiica mea de cinci ani nu este foarte pasionată de matematică. Nu că o deranjează, dar este mai interesată de prințese și, aparent, prințesele au mai multă înclinație spre dans, așa că este mai interesată de dans. Dar mi-a spus că la școală învață diferitele moduri de a-l aduna pe șase. Am întrebat-o dacă asta înseamnă că știu deja în câte moduri se pot aduna unu, doi, trei, patru și cinci. „Sigur”, a fost răspunsul. Din care am dedus că încă nu fac distincție între adunare și scădere și că lucrează cu numere naturale. Acest lucru m-a încurajat să o întreb: „Hei, în câte moduri diferite se poate aduna șapte?” După ce mi-a aruncat o privire sfidătoare, a luat un pix și mi-a spus: „Să vedem câte ies”. Și a început să scrie. Sunt emoționat; cred că esta prima dată când nu mi-a cerut să dansez. După ceva timp petrecut calculând cu atenție, am ajuns la concluzia că există cincisprezece moduri diferite de a obține șapte ca rezultat al unei adunări. Le notez aici ca să vedeți că nu veți găsi altele:

$$1+1+1+1+1+1+1$$

$$2+1+1+1+1+1$$

$$2+2+1+1+1$$

$$2+2+2+1$$

$$3+1+1+1+1$$

$$3+2+1+1$$

$$3+2+2$$

$$3+3+1$$

$$4+1+1+1$$

$$4+2+1$$

$$4+3$$

$$5+1+1$$

$$5+2$$

$$6+1$$

$$7$$

Ne-am continuat investigația: știm în câte moduri diferite putem obține 1 (doar unu), 2 (doar două: $1 + 1$ și 2), 3 (3 poate fi adunat în trei moduri diferite: $1 + 1 + 1$, $2 + 1$ și 3), 4 (în cinci moduri: $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$, $2 + 2$, $3 + 1$, 4), 5 (în șapte moduri diferite; puteți verifica dacă doriți), 6 (în nu mai puțin de unsprezece moduri diferite), 7 (cincisprezece, tocmai am văzut) ... și putem construi șirul

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, \dots$$

a diferitelor moduri în care fiecare dintre numerele naturale poate fi descompus în sume dintre alte numere naturale. De fapt, eu și fiica mea descoperim apa caldă pentru că, chiar dacă ea nu o știe încă, în matematică există deja o funcție bine-cunoscută care asociază fiecărui număr natural n numărul de moduri $m(n)$ în care acel număr se poate obține prin adunarea altor numere naturale:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow m(1) = 1 \\ 2 &\rightarrow m(2) = 2 \\ 3 &\rightarrow m(3) = 3 \\ 4 &\rightarrow m(4) = 5 \\ 5 &\rightarrow m(5) = 7 \\ 6 &\rightarrow m(6) = 11 \\ 7 &\rightarrow m(7) = 15 \end{aligned}$$

...

Această funcție de partiție este utilizată în diferite domenii ale matematicii și fizicii.

După o observație inițială inocentă, este ușor de observat că șirul pe care îl construim trebuie neapărat să fie crescător (fiecare termen trebuie să fie mai mare decât cel anterior), deoarece pentru fiecare număr n se pot face cel puțin aceleași partiții ca pentru numărul anterior, $m(n - 1)$, adunând unu (+1) fiecăreia dintre ele, adăugând, în plus, partiția corespunzătoare numărului n însuși. Această condiție poate fi exprimată mai formal scriind

$$\forall n \in \mathbb{N}, m(n) \geq m(n-1) + 1$$

care se citește: *pentru fiecare număr natural n este valabil că funcția sa de partiție $m(n)$ este mai mare sau egală cu funcția de partiție a numărului natural imediat precedent $m(n - 1)$ plus unu.*

Rețineți că scriem mai mare sau egal ($\geq$) și nu egal ($=$) deoarece, pe măsură ce numerele devin mai mari, apar partiții care anterior nu erau permise. De exemplu, în cazul lui 4 avem că $m(4) = m(3) + 2$, pentru că există o partiție formată din doi de 2 ($4 = 2 + 2$), care nu a existat în $m(3)$, referitor la 7 avem $m(7) = m(6) + 4$ deoarece există trei partiții noi: $3 + 2 + 2$, $4 + 3$ și $5 + 2$, care nu se obțin prin adăugarea lui unu (+1) la niciuna dintre cele $m(6)$ partiții corespunzătoare lui 6. Dacă lăsăm loc imaginației, putem construi toate șirurile crescătoare de numere pe care le dorim. De exemplu, acesta:

$$0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \dots$$

Dacă vă plac provocările, vă invit să vă opriți un moment înainte de a continua să citiți pentru a încerca să găsiți o logică în acel șir (care de fapt are una). Dacă ați făcut-o deja, felicitări, dar, fie că ați reușit sau nici nu vreți să vă gândiți la asta, ne putem continua povestea dezvăluind că am construit-o făcând pătratul fiecărui număr natural și scăzând unul.

$$1 \rightarrow 1^2 - 1 = 0$$

$$2 \rightarrow 2^2 - 1 = 3$$

$$3 \rightarrow 3^2 - 1 = 8$$

$$4 \rightarrow 4^2 - 1 = 15$$

$$5 \rightarrow 5^2 - 1 = 24$$

$$6 \rightarrow 6^2 - 1 = 35$$

$$7 \rightarrow 7^2 - 1 = 48$$

...

O regulă care poate fi scrisă și mai formal după cum urmează:

$$\{a_i\}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow a_n = n^2 - 1$$

și se poate citi așa: $\{a_i\}$ face ca fiecărui număr natural n aparținând mulțimii numerelor naturale să-i corespundă unui element a_n al mulțimii numerelor reale astfel încât a_n este egal cu pătratul acestui număr natural n minus unu.

În general, relațiile care fac astfel încât fiecărui număr natural să-i corespundă un număr real după un anumit set de reguli se numesc *șiruri*. Definirea unui șir prin intermediul unei reguli precum cea din exemplul precedent se numește definiție a termenului său general și are avantajul că permite cunoașterea oricărui termen al acestui șir pur și simplu cunoscându-l pe cel precedent, este suficient să ridicați numărul 11 la pătrat și să scădeți unu, $a_{11} = 11^2 - 1 = 120$. Rețineți că n indică întotdeauna poziția ocupată de termenul a_n în șir.

Acesta nu este singurul mod posibil de a defini un șir. Mai de- vreme, când încercați să găsiți o logică pentru șirul pe care l-am prezentat, este posibil să fi identificat una diferită de cea descrisă până acum. De exemplu, este posibil să fi observat că fiecare termen al șirului nostru poate fi obținut prin adunarea numerelor impare succesive precedente.

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$a_4 = a_3 + 7 = 8 + 7 = 15$$

$$a_5 = a_4 + 9 = 15 + 9 = 24$$

$$a_6 = a_5 + 11 = 24 + 11 = 35$$

$$a_7 = a_6 + 13 = 35 + 13 = 48$$

...

Dacă ați observat, felicitări pentru claritate. Această altă modalitate de definire a termenilor unui șir este cunoscută ca definiție *recursivă* și permite, odată cunoscuți primii termeni, generarea succesivă a tuturor celorlalți din aceștia. În special pentru acest șir, regula este rezumată după cum urmează:

$$a_n = a_{n-1} + 2n + 1, \quad a_1 = 0$$

expresie în care trebuie să aveți grijă să nu confundați valoarea reală a termenului a_n cu poziția n pe care o ocupă în șir. Făcând unele calcule putem vedea că fiecare termen a_n din acest șir poate fi exprimat în funcție de a_{n-1} anterior și prin intermediul acestei alte formule ce rezultă echivalentă:

$$a_n = a_{n-1} + 2\sqrt{a_{n-1} + 1} + 1, \quad a_1 = 0$$

Dacă nu mă credeți, puteți încerca să o faceți singuri:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0 + 2\sqrt{0+1} + 1 = 3$$

$$a_3 = 3 + 2\sqrt{3+1} + 1 = 8$$

$$a_4 = 8 + 2\sqrt{8+1} + 1 = 15$$

$$a_5 = 15 + 2\sqrt{15+1} + 1 = 24$$

$$a_6 = 24 + 2\sqrt{24+1} + 1 = 35$$

$$a_7 = 35 + 2\sqrt{35+1} + 1 = 48$$

...

Mă întreb care va fi termenul general al șirului pe care l-am generat folosind funcția de partiție $m(n)$... Va admite o definiție prin recurență?

Îți propun o afacere

În secțiunea anterioară am definit ce este un șir și am prezentat câteva exemple de șiruri crescătoare. În această secțiune vom ilustra faptul că nu tot ceea ce crește o face în același fel. Pentru a face asta, o să vă povestesc despre un coleg de-al meu care are talent la finanțe și care, se pare, a găsit formula unei afaceri extraordinar de profitabile. Întrucât este prietenul meu și mă apreciază, mi-a oferit ocazia să particip la activitate. Voi contribui astfel la demararea ei cu un capital inițial de 1000 de euro și după ceva timp vom începe să obținem profituri mari pe care le vom împărți.

Colegul meu mi-a dat posibilitatea de a alege între două variante și nu mă hotărăsc: pe de o parte, mi-a propus să-mi dea 50 la sută din capitalul inițial în fiecare an și, pe de altă parte, să-mi dea 26 la sută din capitalul pe care îl voi fi acumulat până în acel moment. Prima variantă pare mai profitabilă: în primii ani aș primi 1500 de euro, 2000 de euro, 2500 de euro, 3000 de euro..., în timp ce cu a doua opțiune aș primi 1260 de euro, 1588 de euro, 2000 de euro,